الأربعاء 30 / 5 / 2018

التمرين الأول:

1. لتكن لدينا المعادلة التفاضلية:

$$(3x + 2x^2)\, y'' - 6(1+x)\, y' + 6y = 6$$

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية إذا علمت أن:

$y_1 = 1$ و $y_2 = x+2$ حلين خاصين لها.

اعتماداً على الملاحظة من المحاضرة الخامسة التي تقول:

أنه فرق أي حلين خاصين لغير المتجانسة هو حل للمعادلة المتجانسة المناظرة أي الحل العام يعطى بالصورة $y_h = (y_{p_2} - y_{p_1})v + y_{p_1}$

الحل العام يعطى بالعلاقة: $y = y_1 + (y_2 - y_1)v$

أي $y = 1 + (x+1)v$ نشتق مرتين متتاليتين فنجد أن:

$$y' = (x+1)v' + v \qquad y'' = 2v' + (x+1)v''$$

نعوض في المعادلة المعطاة فنجد أن:

$$(3x + 2x^2)(x+1)v'' + 2(3x + 2x^2)v' - 6(x+1)^2 v' - 6(1+x)v +$$
$$+ 6 + 6(x+1)v = 6$$

$$(3x + 2x^2)(x+1)\, v'' + (2x^2 - 6x - 6)\, v' = 0$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى بالنسبة لـ v'

$$v' = u \Rightarrow u'' = u'$$

$$x(3+2x)(x+1)\, u' - 2(x^2 + 3x + 3)\, u = 0$$

$$\frac{u'}{u} = 2 \cdot \frac{x^2 + 3x + 3}{x(x+1)(3+2x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{2x+3}$$

$$A = 1 \qquad B = -1 \qquad C = 1$$

$$\frac{u'}{u} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+3}$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{u}{c} = \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|2x+3|$$

$$\Rightarrow \ln\frac{u}{c} = \ln\frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{u}{c} = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$$

$$u = c_1\frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2} \qquad u = v'$$

$$\Rightarrow v = c_1\int\frac{2x^3+3x^2}{x^2+2x+1}\,dx + c_2$$

نقسم البسط على المقام

$$(2x-1) + \frac{1}{x^2+2x+1}$$

$$v = c_1\cdot(x^2-x) - c_1\frac{1}{x+1} + c_2$$

ومنه فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو:

$$y = 1 + (x+1)\left[c_1(x^2-x) - c_1\frac{1}{x+1} + c_2\right]$$

$$y = 1 + c_2(x+1) + c_1(x^3-x-1)$$

$$y = 1 + c_2(x+1) + c_1x^3$$

** ** **

التمرين الثالث:

أوجد الحل العام للمعادلة المعطاة علماً أن:

$$(3x+2x^2)y'' - 6(x+1)y' + 6y = 6$$

المعادلة المتجانسة المناظرة حلولها خاصة على هيئة كثيرات حدود:

$$y = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots$$

$$y' = nx^{n-1} + \dots$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2} + \dots$$

نعوض في المعادلة:

$$2n(n-1)x^n - 6nx^n + 6x^n = 0$$

$$2n^2 - 8n + 6 = 0 \qquad 2(n^2 - 4n + 3) = 0$$

/ /

$2(n-1)(n-3)=0$

$y = x + A$ كثيرة حدود من الدرجة الاولى $n=1$

$y = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ كثيرة حدود من الدرجة الثالثة $n=3$

لنعتبر كثيرة الحدود ذات الدرجة الاولى :

$y = x + A \qquad y' = 1 \qquad y'' = 0$

نعوض في المعادلة التفاضلية نجد أن $A = 1$ ←

$y_1 = x + 1$

من أجل كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة :

$y = x^3 + Ax^2 + Bx + C$

$y' = 3x^2 + 2Ax + B$

$y'' = 6x + 2A$

نعوض في المعادلة التفاضلية المتجانسة المناظرة :

$$(3x + 2x^2)(6x + 2A) - 6(x+1)(3x^2 + 2Ax + B) + 6(x^3 + Ax^2 + Bx + C) = 0$$

$A = 0$

$C = B \qquad B = 1$ باختيار

$\rightarrow y_2 = x^3 + x + 1$

$y_h = A_1 y_1 + A_2 y_2$

$y_h = A_1(x+1) + A_2(x^3 + x + 1)$

الحل الخاص يعطى بالعلاقة :

$$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w} dx + y_2 \int \frac{w_2}{w} dx$$

Alamat

$$W(x+1,\ x^3) = x^2(2x+3)$$

$$W_1 = \frac{-6x^2}{2x+3} \qquad W_2 = \frac{6(x+1)}{x(2x+3)}$$

$$y_p = -6(x+1)\int \frac{1}{(2x+3)^2}\,dx + 6x^3\int \frac{x+1}{x^3(2x+3)^2}\,dx$$

= 1

xx xx xx xx

التمرين الثالث:

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية

$$(2x+1)y'' + (2x-1)y' - 2y = x^2 - x$$

1- أوجد الحل العام للمعادلة المعطاة إذا علمت أن

$$y = \frac{x^2+1}{2} \qquad y_2 = \frac{x^2+4x-1}{2}$$

2- أوجد الحل العام إذا علمت أن للمعادلة حلولاً خاصة على هيئة كثيرات حدود.

الحل:

$$y = x^n + \dots$$
$$y' = n x^{n-1} + \dots$$
$$y'' = n(n-1)x^{n-2} + \dots$$

نعوض في المعادلة التفاضلية المتجانسة المناظرة:

$$(2n-2)x^n + \dots = 0$$

بالمطابقة نجد أنّ : $2n-2=0 \leftarrow n=1$

درجة كثيرة الحدود هي الدرجة الأولى

لتعيين كثيرة الحدود المنشودة نفرض $y=x+A$ نشتق عدداً من المرات يساوي رتبة المعادلة التفاضلية

$y'=1$

$y''=0$

نعوض في المعادلة التفاضلية المتجانسة فنجد :

$A=-\frac{1}{2} \longrightarrow y_1 = x-\frac{1}{2}$ حل

$y_1 = 2x-1$ حل

لإيجاد الحل العام نتابع طريقة ليوفيل أوستراغرادسكي :

المعادلة تكتب على النحو التالي:

$$y'' + \frac{2x-1}{2x+1}y' - 2\frac{1}{2x+1} = \frac{x^2-x}{2x+1}$$

$$e^{-\int p(x)\,dx} = (2x+1)e^{-x}$$

$$y_h = (2x-1)\left[c_1\int \frac{e^{-x}}{(2x-1)}\,dx + c_2\int \frac{2e^{-x}}{(2x-1)^2}\,dx + c_2\right]$$

لحساب قيمة التكامل :

$$2\int \frac{e^{-x}}{(2x-1)^2}\,dx$$

نفرض أنّ $u=e^{-x}$

$u' = -e^{-x}\,dx$ $\quad v' = \frac{1}{(2x-1)^2}$

$v = -\frac{1}{2(2x-1)}$

$$I = -\frac{e^{-x}}{2(2x-1)} - \frac{1}{2}\int \frac{e^{-x}}{2x-1}\,dx$$

نعوض فنجد أن :

$$y_h = (2x-1)\left(c_0 \frac{e^{-x}}{(2x-1)} + c_2 \right)$$

حيث c_0 و c_2 ثوابت كيفية ومنه يأتي :

$$y_h = c_0 e^{-x} + c_2 (2x-1)$$

ملاحظة : كان بالإمكان المقارنة دون طرق التفصيل فنجد أن الحل الثاني e^{-x} .

الحل العام للمعادلة المعطاة هو: $y = y_h + y_p$

ولكن :

$$y_p = y_1 \int \frac{w_1}{w}\, dx + y_2 \int \frac{w_2}{w}\, dx$$

$$w = \begin{vmatrix} 2x-1 & e^{-x} \\ 2 & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-x}(2x+1)$$

$$w_1 = -\frac{x^2-x}{2x+1} e^{-x} \qquad w_2 = \frac{x(x-1)(2x-1)}{2x+1}$$

$$y_p = (2x-1) \int \frac{x(x-1)}{(2x+1)^2}\, dx - e^{-x} \int \frac{x(x-1)(2x-1)}{(2x+1)^2} e^{x}\, dx$$

$$(2x-1) \int \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \frac{8x+1}{(2x+1)^2}\, dx \right) - e^{-x} \int \left(\frac{x(x-1)(2x-1)}{(2x+1)^2} e^{x} \right) dx$$

لنوجد قيمة التكامل :

Alamal

/ /

$$-\frac{1}{4}\int \frac{8x+1}{(2x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{4}\int \frac{8x+4-3}{(2x+1)^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{2(2x+1)}{(2x+1)^2}\,dx + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(2x+1)^2}$$

نوجد قيمة التكامل .. فيكون الحل العام

** ** ** **

تمارين :

① $(x+1)y'' + (x+2)y' - y = x + \frac{1}{x}$

لاحل خاص على صيغة كثيرة حدود .

الجواب : $y = c_1(x+2) + \frac{c_2}{x} + y_p$

② $(x^2-x)y'' + (2x-3)y' - 2y = \frac{1}{x^2(2x-3)}$

لاحل خاص على صيغة كثيرات حدود .

$y = \frac{c_1}{x^2} + c_2(2x-3)$

③ $(3x^3+x)y'' + 2xy' - 6xy = 4 - 12x^2$

$y_1 = 2x \qquad y_2 = (x+1)^2$

$y = c_1(x^2+1) + \frac{c_2}{x} + 2x$

** ** ** **